Chapitre 2

Familles de vecteurs

et

espaces vectoriels de dimension finie

Présentation

Ce PDF est le second support de cours de l'ECUE EV du S2 : espaces vectoriels. Il porte sur les notions de familles de vecteurs et d'espaces vectoriels de dimension finie.

Il sert de substitution et/ou de complément des MiMos concernant ce même sujet. Il y a tout ce qui vous servira pour faire les TD.

Les définitions sont en violet, les théorèmes et propositions en rouges et les exemples à connaitre en bleu. La dernière partie de ce support comporte les démonstrations à connaitre sur ce thème.

Vous trouverez aussi des commentaires (remarques, warning) qu'il ne faut pas négliger.

Il y a par ailleurs quelques exemples supplémentaires et exercices fondamentaux.

Table des matières

1 Familles finies d'un espace vectoriel 3
1.1 Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels engendrés 3
1.2 Les familles libres ou liées 4
1.3 Les familles génératrices 6
1.4 Bases 7
2 Espaces vectoriels de dimension finie 8
2.1 Définitions 8
2.2 Conséquences sur les familles finies 10
2.3 Dimension des sous-espaces vectoriels 11
3 Les démonstrations à connaitre 12
3.1 Sous-espace vectoriel engendré 12
3.2 Caractérisation d'une base 13
3.3 Existence d'une base 13

1 Familles finies d'un espace vectoriel

Dans toute cette partie, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$.

Par la suite, une **famille** de n vecteurs de E sera vue comme un élément de E^n. Ainsi, une famille de n vecteurs de E sera notée $(u_1, \ldots, u_n)$ avec $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $u_i \in E$. Nous ne parlerons dans ce cours que de famille finie.

1.1 Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels engendrés

Définition

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

- Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Le vecteur $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ est appelée **combinaison linéaire** des vecteurs de $\mathcal{F}$.
- On appelle **sous-espace vectoriel engendré** par $\mathcal{F}$, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$:

$$\{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n;\ \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

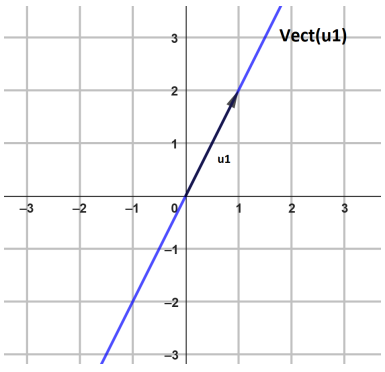
- Cet ensemble est plutôt noté $\text{Vect}((u_1, \ldots, u_n)) = \text{Vect}(\mathcal{F})$. Ainsi,

$$\{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n;\ \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((u_1, \ldots, u_n)) = \text{Vect}(\mathcal{F})$$

Exemples

• Dans $\mathbb{R}^2$, prenons $u_1 = (1, 2)$ et $u_2 = (3, 4)$.

- $v = 1u_1 + 1u_2$, $u_1 = 1u_1 + 0u_2$ et $0_{\mathbb{R}^2} = 0u_1 + 0u_2$ sont des combinaisons linéaires de (u_1, u_2).
- $\text{Vect}((u_1))$ est la droite vectorielle dirigée par u_1 car $\text{Vect}((u_1)) = \{\alpha u_1, \alpha \in \mathbb{R}\}$.



- $\text{Vect}((u_1, u_2))$ est $\mathbb{R}^2$ car $\text{Vect}((u_1, u_2)) = \{\alpha u_1 + \beta u_2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ et u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires. Cela signifie qu'en construisant tous les parallélogrammes possibles à partir de u_1 et u_2, nous obtiendrons $\mathbb{R}^2$ en entier.

• Dans $\mathbb{R}[X]$, $2X^2 - 2X + 6 \in \text{Vect}(X^2 - X, 1)$ car $2X^2 - 2X + 6 = 2(X^2 - X) + 6 \times 1$.

Exemples classiques

- Pour $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, si $u \neq 0_E$, $\text{Vect}((u))$ est une droite vectorielle de E.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $\text{Vect}((u, v))$ est un plan vectoriel si u et v sont non colinéaires et non nuls.

Proposition

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

- $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est même le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) qui contient $\mathcal{F}$.

- Si u_n est une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{n-1}$ alors

$$\text{Vect}((u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n)) = \text{Vect}((u_1, \ldots, u_{n-1}))$$



Le second point est une des démonstrations à connaitre. Vous la trouvez dans la dernière partie de ce chapitre ou dans le PDF "démonstrations à connaitre" sur moodle.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, $\text{Vect}(((1,-2),(-3,6))) = \text{Vect}(((1,-2)))$ car $(-3,6) = -3(1,-2)$. C'est donc une droite vectorielle (celle d'équation $y = -2x$) et non un plan !!

1.2 Les familles libres ou liées

Définition

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

- On dit que $\mathcal{F}$ est une famille libre si

$$\forall\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,\ (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0_E \implies \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0)$$

- On dit que $\mathcal{F}$ est une famille liée si elle n'est pas libre c'est-à-dire

$$\exists\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\} \text{ (non tous nuls) tel que } \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0_E$$



- La caractérisation mathématique de « famille liée » est la négation de celle de « famille libre ».
- Pour savoir si la famille $\mathcal{F}$ est libre ou pas, il faut partir de l'équation $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0_E$. Il est clair que cette équation admet $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ comme solution évidente.

  La question est : est-ce l'unique solution à cette équation ? Si oui, la famille est libre, sinon elle est liée. Pour cela, il vous faudra résoudre un système.
- Quand la famille est liée, on attend de vous de clairement nous écrire une solution (non nulle !) à l'équation.

Proposition

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

- $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.
- $\mathcal{F}$ est liée si et seulement si l'un au moins de ses vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

Exemples classiques

- $u \neq 0_E \iff$ la famille (u) est libre.
- Deux vecteurs non nuls de E non colinéaires forment une famille libre.
- Si 0_E fait parti des vecteurs de $\mathcal{F}$ alors $\mathcal{F}$ est liée.
- $\mathcal{F}_1 = ((1,0),(0,1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}_2 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ etc...
- $\mathcal{F} = (1, X, \ldots, X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.



À retenir :

- Une famille composée d'un seul vecteur non nul est libre.
- Une famille composée de deux vecteurs non colinéaires est libre.



La notion de colinéarité ne s'utilise uniquement que pour 2 vecteurs !

Pour une famille de 3 vecteurs au moins, il faudra passer par un système ! Et ne pensez que, par exemple, 3 vecteurs u_1, u_2 et u_3 non deux à deux colinéaires forment une famille libre : la famille $((1,1,1),(1,0,0),(4,1,1))$ est liée car $1(1,1,1) + 3(1,0,0) = (4,1,1)$

Exercice classique

Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère la famille $\mathcal{F} = (P_1 = 1, P_2 = X^2 + X + 1, P_3 = X^2 - X + 1)$.

Cette famille est-elle libre ?

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0_E$. Ainsi, on a $\alpha + \beta(X^2+X+1) + \gamma(X^2-X+1) = 0_E$ ce qui revient à $\alpha + \beta + \gamma + X(\beta - \gamma) + X^2(\beta + \gamma) = 0_E$. Or, on sait qu'un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls. On est donc ramené à résoudre le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0 \text{ en faisant } L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

On en déduit que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Proposition

- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

1.3 Les familles génératrices

Définition

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

On dit que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E si

$$\forall\, u \in E,\ \exists\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,\ u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$$

Autrement dit, cela signifie que n'importe quel vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} \text{ génératrice de } E \iff E = \text{Vect}(\mathcal{F})$$

Exemples classiques

- $\mathcal{F}_1 = ((1,0),(0,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ car

$$\forall\, u = (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ u = x(1,0) + y(0,1)$$

  De même, on montre que $\mathcal{F}_2 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

- $\mathcal{F} = (1, X, \ldots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$ car

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists\, (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ P = a_0.1 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$$

- Une famille quelconque $\mathcal{F}$ est forcément une famille génératrice de $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

Exercices classiques

1. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère la famille $\mathcal{F} = (P_1 = 1, P_2 = X^2 + X + 1, P_3 = X^2 - X + 1)$. Cette famille est-elle génératrice de E ?

   Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$.

   Cherchons $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = P$.

   En remplaçant, on a $\alpha + \beta + \gamma + X(\beta - \gamma) + X^2(\beta + \gamma) = aX^2 + bX + c$ (voir exercice classique « familles libres ») . Or deux polynômes sont égaux s'ils ont les mêmes coefficients. On est donc ramené à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & c \\ & & \beta & - & \gamma & = & b \\ & & \beta & + & \gamma & = & a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & c \\ & & \beta & - & \gamma & = & b \\ & & 2\beta & & & = & a+b \end{array}\right. \quad \text{en faisant } L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

   Ainsi, en remontant le système, $\alpha = c - a$, $\beta = \dfrac{a+b}{2}$ et $\gamma = \dfrac{a-b}{2}$.

   On en déduit que

$$\forall\, P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X],\ P = (c-a)P_1 + \frac{a+b}{2}P_2 + \frac{a-b}{2}P_3$$

   La famille $\mathcal{F}$ est bien génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Trouver une famille génératrice de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\}$.

$$F = \Big\{(x, y, -x + 2y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\Big\} = \Big\{x(1, 0, -1) + y(0, 1, 2),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\Big\} = \text{Vect}\left(((1, 0, -1), (0, 1, 2))\right)$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F} = ((1, 0, -1), (0, 1, 2))$ est génératrice de F.



Attention à ne pas confondre $\mathcal{F}$ et $\text{Vect}(\mathcal{F})$!!
$\mathcal{F}$ a un nombre fini de vecteurs alors que $\text{Vect}(\mathcal{F})$ en a une infinité. De plus, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un espace vectoriel (et pas $\mathcal{F}$)

1.4 Bases

Définition

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

On dit que $\mathcal{F}$ est une base de E si elle est à la fois une famille libre et génératrice de E.

Exemples classiques à connaitre

- $\mathcal{F} = ((1, 0), (0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathcal{F} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est base de $\mathbb{R}^3$, appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^3$.
- $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ où $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$ est base de $\mathbb{R}^n$, appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{F} = (1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Elle aussi est appelée **base canonique** de $\mathbb{R}_n[X]$.

Théorème

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

$\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si

$$\forall\, u \in E,\ \exists !(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,\ u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$$

α_i est alors appelée i-ème coordonnée de u dans la base $\mathcal{F}$.



Démonstration à connaitre ! Vous la trouvez dans la dernière partie de ce chapitre ou dans le PDF "démonstrations à connaitre" sur moodle.



- L'existence des « α » vient du fait que la famille est génératrice de E. Leur unicité vient du fait que la famille est libre.

- La notion de base correspond notamment dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ à la création de nouveaux repères.

Exemples

1. On admet que $\mathcal{F} = (u_1 = (1,1,-1), u_2 = (1,-1,1), u_3 = (-1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

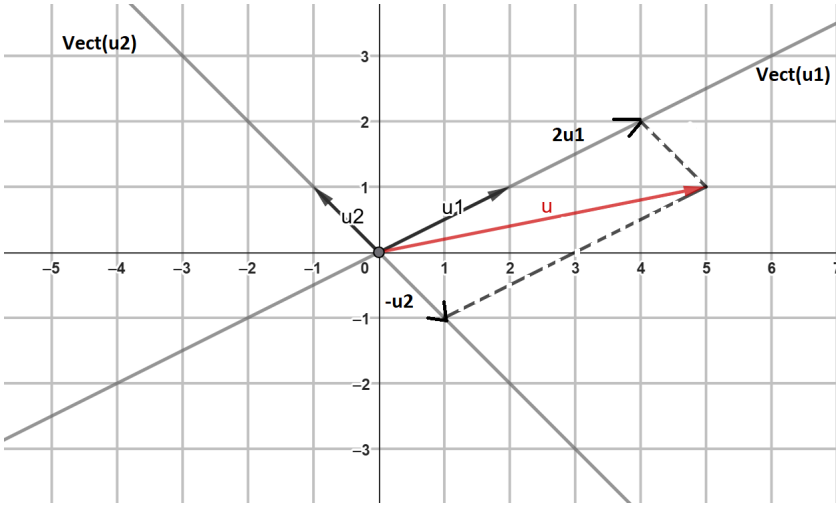
   • Les coordonnées de u_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont 1, 1 et -1 alors que dans la base $\mathcal{F}$, ce sont 1, 0 et 0. En effet, $u_1 = 1(1,0,0) + 1(0,0,1) + (-1)(0,0,1)$ et $u_1 = 1u_1 + 0u_2 + 0u_3$.

   • Les coordonnées de $u = (1,2,3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont 1, 2 et 3. Si l'on cherche celles dans la base $\mathcal{F}$, soit on les trouve « de tête », soit on cherche α_1, α_2 et α_3 réels tels que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = (1,2,3)$. On trouve $\alpha_1 = \dfrac{3}{2}$, $\alpha_2 = 2$ et $\alpha_3 = \dfrac{5}{2}$.

2. Dans $\mathbb{R}^2$, on peut facilement trouver graphiquement les coordonnées d'un vecteur dans une base en faisant des projections sur les deux axes portés par les 2 vecteurs de la base. Voilà un exemple.

   On se place dans la base $\mathcal{B} = (u_1 = (2,1), u_2 = (-1,1))$ de $\mathbb{R}^2$. On cherche les coordonnées de $u = (5,1)$.

   Pour cela, on effectue 2 projections : l'une sur la droite Vect$((u_1))$ parallèlement à la droite Vect$((u_2))$, l'autre sur la droite Vect$((u_2))$ parallèlement à la droite Vect$((u_1))$. On lit $u = 2u_1 - u_2$. Cela signifie que les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ sont 2 et -1.



   On peut vérifier ce résultat : $2u_1 - u_2 = 2(2,1) - (-1,1) = (5,1)$.

2 Espaces vectoriels de dimension finie

Dans toute cette section, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$.

2.1 Définitions

Définition

On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Espaces vectoriels de dimension finie de référence

Les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivants sont de dimension finie :

- $\mathbb{R}^2$ car $((1,0),(0,1))$ en est une famille génératrice finie.
- $\mathbb{R}^3$ car $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ en est une famille génératrice finie.
- Plus généralement, $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie.
- $\mathbb{R}_n[X]$ car $(1, X, \ldots, X^n)$ en est une famille génératrice finie.



$\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas des espaces vectoriels de dimension finie !

Théorème

Soit E un espace vectoriel engendré par n vecteurs non nuls (donc de dimension finie).

Alors toutes famille libre de E a au plus n vecteurs.

De cette proposition découle le théorème suivant :

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. Alors

- E admet au moins une base.
- Toutes les bases de E ont le même cardinal (c'est-à-dire le même nombre de vecteurs).



Le premier point est une des démonstrations à connaitre. Vous la trouvez dans la dernière partie de ce chapitre ou dans le PDF "démonstrations à connaitre" sur moodle.

Une fois, ce théorème admis, on peut définir ce qu'on appelle « la dimension d'un espace vectoriel » :

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- Supposons $E \neq \{0_E\}$. Si E admet une base, on appelle dimension de E, notée $\dim(E)$, le cardinal de n'importe quelle base de E.
- Si $E = \{0_E\}$, on pose $\dim(E) = 0$.



Dans le cas $E \neq \{0_E\}$, on a donc $\dim(E) \in \mathbb{N}^*$

Dimensions à connaitre

Si vous reprenez la liste des espaces vectoriels de dimension finie de référence, les familles génératrices citées sont aussi libres (ces familles sont les bases canoniques, cf. section précédente). Ainsi :

$$\dim(\mathbb{R}^2) = 2,\ \dim(\mathbb{R}^3) = 3,\ \dim(\mathbb{R}^n) = n \text{ et } \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$$

2.2 Conséquences sur les familles finies

Proposition

Supposons E de dimension finie avec $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

- Toute famille libre de E a au plus n vecteurs.
- Toute famille ayant au moins $n+1$ vecteurs est liée.
- Toute famille génératrice de E a au moins n vecteurs.

Exemples

- La famille $\mathcal{F} = ((1,2),(3,4),(5,6))$ est liée car $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 > \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.
- La famille $\mathcal{F} = (2, X-1, (X-1)^2)$ ne peut pas être génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$ car $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 < \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.



La dimension d'une famille n'a pas de sens ! On parle de cardinal d'une famille. Ainsi, vous ne devez jamais écrire $\dim(\mathcal{F})$. Vous devez écrire $\text{Card}(\mathcal{F})$.



Proposition

Supposons E de dimension finie avec $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors,

1. $\mathcal{F}$ libre et $\text{Card}(\mathcal{F}) = n \iff \mathcal{F}$ base de E.
2. $\mathcal{F}$ génératrice et $\text{Card}(\mathcal{F}) = n \iff \mathcal{F}$ base de E.
3. $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si
$$\text{Card}(\mathcal{F}) = n \text{ et } (\mathcal{F} \text{ libre ou génératrice de } E)$$
4. Supposons $\text{Card}(\mathcal{F}) = n$. On a alors
$$\mathcal{F} \text{ base de } E \iff \mathcal{F} \text{ génératrice de } E \iff \mathcal{F} \text{ libre}$$



- Les points 3. et 4. de la proposition ci-dessus sont une autre manière d'énoncer les points 1. et 2.
- Cette proposition est intéressante au sens où elle nous fait gagner du temps. En effet, dans ce contexte, on choisit de montrer soit que $\mathcal{F}$ est libre, soit qu'elle est génératrice de E.
- Bien sûr, cette proposition ne peut servir que si on connait la dimension de l'espace vectoriel dans lequel on travaille.

Exemples

La famille $\mathcal{F} = ((u_1 = (1,2), u_2 = (3,4))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. En effet, comme u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, cette famille est libre. De plus, $\text{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.

Exercice classique

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $\mathcal{F} = (u_1 = (1,1,1), u_2 = (2,1,1), u_3 = (1,-1,1))$.

Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que $\mathcal{F}$ est libre : soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. On est ramené au système

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta - \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{cases}$$

En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, cela revient à $\begin{cases} \beta &= 0 \\ -2\gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0.$

Ainsi, $\mathcal{F}$ est une famille libre.

Or $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.3 Dimension des sous-espaces vectoriels

Commençons déjà par un exemple, que vous devez savoir traiter.

Exemple incontournable : déterminer la dimension d'un sev

Trouver la dimension de $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + z = 0\}$.

• On commence par trouver une famille génératrice de F :

On a $F = \{(x, y, -x + 2y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Ainsi,

$$F = \left\{x(1,0,-1) + y(0,1,2),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \text{Vect}\left(((1,0,-1),(0,1,2))\right)$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F} = (u_1 = (1,0,-1), u_2(0,1,2))$ est génératrice de F.

• On vérifie que la famille obtenue est libre (sinon, on enlève un des vecteurs...).

Comme u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, $\mathcal{F}$ est bien une famille libre.

On conclut ainsi que $\mathcal{F}$ est une base de F. Donc $\dim(F) = 2$.



Pour trouver la dimension d'un sous-espace vectoriel, il faut revenir à la définition : c'est le cardinal d'une base ! Ainsi, on commence d'abord par lui trouver une famille génératrice puis d'en extraire une famille libre. On aura ainsi notre base. Les 3 mots « génératrice », « libre » et « base » doivent être clairement écrits dans votre démonstration ! !

Pour finir, voilà les derniers résultats. Ils semblent logiques. 

Proposition

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
- $F = G$ si et seulement si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$.
- $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ (théorème des 4 dimensions)
- F admet au moins un supplémentaire H dans E et $\dim(H) = \dim(E) - \dim(F)$.

3 Les démonstrations à connaitre

3.1 Sous-espace vectoriel engendré

Proposition

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

Si u_n est une combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{n-1}$ alors

$$\text{Vect}((u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n)) = \text{Vect}((u_1, \ldots, u_{n-1}))$$

Preuve :

$\subset$ Soit $v \in \text{Vect}((u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n))$.

$$\exists\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1} + \alpha_n u_n$$

Or $\exists\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $u_n = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{n-1} u_{n-1}$. D'où

$v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1} + \alpha_n \lambda_1 u_1 + \ldots + \alpha_n \lambda_{n-1} u_{n-1} = (\alpha_1 + \alpha_n \lambda_1) u_1 + \ldots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n \lambda_{n-1}) u_{n-1}$

Donc $v \in \text{Vect}((u_1, \ldots, u_{n-1}))$.
On a montré que $\text{Vect}((u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n)) \subset \text{Vect}((u_1, \ldots, u_{n-1}))$.

$\supset$ Soit $v \in \text{Vect}((u_1, \ldots, u_{n-1}))$.

$$\exists\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ tel que } v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1} = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1} + 0 u_n$$

Donc $v \in \text{Vect}((u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n))$.
On a montré que $\text{Vect}((u_1, \ldots, u_{n-1})) \subset \text{Vect}((u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n))$

3.2 Caractérisation d'une base

Théorème

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

$\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si

$$\forall\, u \in E,\ \exists !(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,\ u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$$

α_i est alors appelée i-ème coordonnées de u dans la base $\mathcal{F}$

Preuve :

$\Longrightarrow$

- Existence : elle est immédiate car $(e_1, \ldots, e_n)$ engendre E.
- Unicité. Soit $u \in E$.
  Supposons $\exists\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\exists\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \quad \text{et} \quad u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$$

  On a

$$\begin{aligned} u - u = (\alpha_1 - \lambda_1)e_1 + \ldots + (\alpha_n - \lambda_n)e_n &= 0_E \\ \Longrightarrow \quad \alpha_1 - \lambda_1 = \ldots = \alpha_n - \lambda_n &= 0 \quad \text{car } (e_1, \ldots, e_n) \text{ libre} \\ \Longrightarrow \quad \forall\, i \in [\![1, n]\!]\ \alpha_i &= \lambda_i \end{aligned}$$

  La décomposition est unique.

$\Longleftarrow$ Supposons que $\forall\, u \in E,\ \exists\,!\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,\ u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$

- $(e_1, \ldots, e_n)$ est alors génératrice de E.
- $(e_1, \ldots, e_n)$ libre ?
  Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0_E$. Cela nous donne une décomposition du vecteur nul de E selon $e_1, \ldots, e_n$. Or, on peut aussi écrire que $0e_1 + \ldots + 0e_n = 0_E$ ce qui nous donne une seconde décomposition. Par unicité de la décomposition, on en déduit que

$$\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$$

  Donc $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.

  Conclusion : $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre et génératrice de E, c'est donc une base de E.

3.3 Existence d'une base

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. Alors, E admet au moins une base.

Preuve :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie avec $E \neq \{0_E\}$. On sait alors que E admet une famille génératrice finie. Notons $G = (u_1, \ldots, u_n)$ cette famille génératrice.

- Si G est libre alors G est une base de E.

- Si G est liée alors un des vecteurs est combinaison linéaire des autres vecteurs. Quitte à renommer les vecteurs, on peut supposer par exemple que c'est u_n. On a alors

$$E = \text{Vect}(G) = \text{Vect}\left((u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n)\right) = \text{Vect}\left((u_1, \ldots, u_{n-1})\right)$$

  ce qui signifie que la famille $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ est génératrice de E.

- Si la famille $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ est libre alors c'est une base de E.

- Si la famille $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ est liée alors un des vecteurs est combinaison linéaire des autres et on peut l'éliminer. On répète alors le principe. La famille ayant un nombre fini de vecteurs au départ, le processus s'arrêtera au maximum quand il n'en restera plus qu'un, par exemple u_1. u_1 étant non nul (car $E \neq \{0_E\}$), il formera une famille libre et génératrice de E donc une base.